УДК 517.392

И. В. Бойков, А. Н. Тында, П. С. Краснощеков

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ТОЧНОСТИ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Аннотация. Целью работы является построение оптимальных по порядку по точности методов решения интегральных уравнений Вольтерра со слабосингулярными ядрами из различных классов функций. Так как вопросы построения оптимальных по точности алгоритмов тесно связаны с оптимальной аппроксимацией функций из классов решений, то в работе применяется аппарат поперечников Бабенко и Колмогорова компактов из классов решений как в одномерном, так и в многомерном случаях. Вычислены порядки поперечников Бабенко и Колмогорова компактов из классов решений одномерных и многомерных уравнений с рассматриваемыми слабосингулярными ядрами. Построены оптимальные по порядку точности численные методы сплайн-коллокационного типа. Полученные теоретические оценки подтверждаются приведенными в заключении численными примерами решения двумерных интегральных уравнений Вольтерра.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра, оптимальные алгоритмы, поперечники Бабенко и Колмогорова, слабосингулярные ядра, метод коллокации.

I. V. Boykov, A. N. Tynda, P. S. Krasnoshchyokov

NUMERICAL METHODS OF OPTIMAL ACCURACY FOR WEAKLY SINGULAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS

Abstract. Objective: the main aim of this paper is the construction of the optimal with respect to accuracy order methods for weakly singular Volterra integral equations of different types. Methods: since the question of construction of the accuracy-optimal numerical methods is closely related with the optimal approximation problem, the authors apply the technique of the Babenko and Kolmogorov n-widths of compact sets from appropriate classes of functions. Results: the orders of the Babenko and Kolmogorov n-widths of compact sets from some classes of functions for one-dimensional and multidimensional cases are evaluated. The special local splines realizing the optimal estimates are also constructed. The optimal (with respect to accuracy order) spline-collocation methods are suggested. Conclusions: the obtained theoretical estimates are verified by the numerical examples for 2-D Volterra integral equations adduced in the paper.

Key words: Volterra integral equations, optimal algorithms, Babenko and Kolmogorov n-widths, weakly singular kernels, collocation method.

Введение

Интегральные уравнения Вольтерра имеют огромное количество приложений в экономике, медицине, экологии [1, 2]. Численным методам решения интегральных уравнений Вольтерра, включая уравнения Абеля – Вольтерра, посвящено большое количество работ, в частности [1–7].

В настоящей статье мы обобщаем наши результаты, связанные с построением оптимальных по точности численных методов для многомерных слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра (ИУВ). Часть из них публикуется впервые.

Статья организована следующим образом. В главе 1 мы вводим используемые классы функций и доказываем некоторые утверждения относительно гладкости точных решений ИУВ. Глава 2 посвящена вычислению поперечников Бабенко и Колмогорова компактов из введенных классов функций. Здесь же строятся специальные локальные сплайны, реализующие оптимальные оценки. В главе 3 описан проекционный метод для многомерных ИУВ, основанный на аппроксимации точных решений такими сплайнами. Численный пример решения двумерного ИУВ приведен в главе 4.

1. Определения и вспомогательные утверждения

1.1. Классы функций

Определение 1.1. Через $Q^{*}_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [0,T]^l$, $l = 1,2,\ldots,$ будем обозначать класс функций $f(t_1,\ldots,t_l)$, определенных на Ω и удовлетворяющих следующим условиям:

$$\left|\frac{\partial^{|v|} f(t_1,\ldots,t_l)}{\partial t_1^{v_1}\cdots\partial t_l^{v_l}}\right| \le M,\ 0 \le |v| \le r,\ \left|\frac{\partial^{|v|} f(t_1,\ldots,t_l)}{\partial t_1^{v_1}\cdots\partial t_l^{v_l}}\right| \le \frac{M}{(\rho(t,\Gamma_0))^{|v|-r-\zeta}},$$

$$r < |v| \le s,\ t \in \{\Omega \setminus \Gamma_0\},$$

где M – некоторая константа, $0 < M < \infty$, $t = (t_1,\ldots,t_l)$; $v = (v_1,\ldots,v_l)$, $|v| = v_1 + \cdots + v_l$; $s = r + \gamma$, $\zeta = 0$, если γ – целое; $s = r + [\gamma] + 1$, $\gamma = [\gamma] + \mu$, $0 < \mu < 1$, $\zeta = 1 - \mu$, если γ – нецелое; Γ_0 – пересечение границы Γ области Ω со множеством координатных плоскостей; $\rho(t,\Gamma_0) = \min\limits_i |t_i|$.

Замечание 1.1. В одномерном случае $(l = 1)$ Γ_0 определяется как точка $t = 0$.

Определение 1.2. Через $Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [0,T]^l$, $l = 1,2,\ldots,$ обозначим класс функций $f(t_1,\ldots,t_l)$, определенных на Ω и удовлетворяющих следующим условиям:

$$\left|\frac{\partial^{|v|} f(t_1,\ldots,t_l)}{\partial t_1^{v_1}\cdots\partial t_l^{v_l}}\right| \le M,\ 0 \le |v| \le r,\ \left|\frac{\partial^{|v|} f(t_1,\ldots,t_l)}{\partial t_1^{v_1}\cdots\partial t_l^{v_l}}\right| \le \frac{M}{(\rho(t,0))^{|v|-r-\zeta}},$$

$$r < |v| \le s,\ t \ne 0,$$

где M – некоторая постоянная, $t = (t_1,\ldots,t_l)$; $v = (v_1,\ldots,v_l)$, $|v| = v_1 + \cdots + v_l$; $s = r + \gamma$, $\zeta = 0$, если γ – целое; $s = r + [\gamma] + 1$, $\gamma = [\gamma] + \mu$, $0 < \mu < 1$, $\zeta = 1 - \mu$, если γ – нецелое; $\rho(t,0) = \min\limits_{k=1,\ldots,l} |t_k|$.

Замечание 1.2. Очевидно, что в одномерном случае ($l=1$) классы функций $Q^{*}_{r,\gamma}(\Omega,M)$ и $Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega,M)$ эквивалентны.

Определение 1.3. Пусть $\Omega=[0,T]^l$, $l=1,2,\ldots,$ $r=1,2,\ldots,$ $0<\gamma\le 1$. Функция $f(t_1,\ldots,t_l)$ принадлежит классу $B^{*}_{r,\gamma}(\Omega,A)$, если выполняются следующие неравенства:

$$|f(t_1,\ldots,t_l)|\le A,\ \left|\frac{\partial^{|v|}f(t_1,\ldots,t_l)}{\partial t_1^{v_1}\cdots\partial t_l^{v_l}}\right|\le A^{|v|}\,|v|^{|v|},\ 0<|v|\le r,\ t\in\Omega,$$

$$\left|\frac{\partial^{|v|}f(t_1,\ldots,t_l)}{\partial t_1^{v_1}\cdots\partial t_l^{v_l}}\right|\le\frac{A^{|v|}\,|v|^{|v|}}{(\rho(t,\Gamma_0))^{|v|-r-1+\gamma}},\ t\in\{\Omega\setminus\Gamma_0\},\ r<|v|<\infty,$$

где A – константа, не зависящая от $|v|$.

Определение 1.4. Пусть $\Omega=[0,T]^l$, $l=1,2,\ldots,$ $r=1,2,\ldots,$ $0<\gamma<1$. Функция $f(t_1,\ldots,t_l)$ принадлежит классу $B^{**}_{r,\gamma}(\Omega,A)$, если выполняются следующие неравенства:

$$|f(t_1,\ldots,t_l)|\le A,\ \left|\frac{\partial^{|v|}f(t_1,\ldots,t_l)}{\partial t_1^{v_1}\cdots\partial t_l^{v_l}}\right|\le A^{|v|}\,|v|^{|v|},\ 0<|v|\le r,$$

$$\left|\frac{\partial^{|v|}f(t_1,\ldots,t_l)}{\partial t_1^{v_1}\cdots\partial t_l^{v_l}}\right|\le\frac{A^{|v|}\,|v|^{|v|}}{(\rho(t,0))^{|v|-r-1+\gamma}},\ t\ne 0,\ r<|v|<\infty,$$

где A – константа, не зависящая от $|v|$.

Замечание 1.3. В одномерном случае ($l=1$) классы функций $B^{*}_{r,\gamma}(\Omega,A)$ и $B^{**}_{r,\gamma}(\Omega,A)$ также эквивалентны.

1.2. Гладкость решений

Для простоты изложения рассмотрим сначала одномерное интегральное уравнение:

$$x(t)-\int_0^t H(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t),\ 0\le t\le T. \qquad (1)$$

Ниже доказана лемма, определяющая свойства гладкости точного решения уравнения (1).

Лемма 1.1. 1. Пусть $H(t,\tau)\in Q^{*}_{r,\gamma}([0,T],1)$ по каждой переменной в отдельности, $f(t)\in Q^{*}_{r,\gamma}([0,T],1)$. Тогда единственное решение $x(t)$ уравнения (1) принадлежит классу $Q^{*}_{r,\gamma}([0,T],M)$.

2. Пусть $H(t,\tau)\in B^*_{r,\gamma}([0,T],A_1)$ по каждой переменной в отдельности, $f(t)\in B^*_{r,\gamma}([0,T],A_2)$. Тогда существует единственное решение $x(t)$ уравнения (1) такое, что $x(t)\in B^*_{r,\gamma}([0,T],A)$.

Доказательство. Хорошо известно, что точное решение (1) является непрерывной функцией. Пусть $C_0=\max\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$, $F_k=\max\limits_{t\in[0,T]}|f^{(k)}(t)|$, $H_k=\max\limits_{(t,\tau)\in[0,T]^2}\left|\dfrac{\partial^k H(t,\tau)}{\partial t^{k_1}\partial\tau^{k_2}}\right|$, $0\le k_1,k_2\le k$, $k_1+k_2=k$, $1\le k\le r$. Через M_k будем обозначать константы, зависящие только от порядка k.

Для доказательства утверждений данной леммы формально продифференцируем выражение $x(t)=f(t)+\int\limits_0^t H(t,\tau)x(\tau)d\tau$:

$$x'(t)=f'(t)+\int\limits_0^t H'_t(t,\tau)x(\tau)d\tau+H(t,t)x(t). \tag{2}$$

Так как правая часть этой формулы есть непрерывная функция, то существует непрерывная производная $x'(t)$ точного решения $x(t)$, которая может быть оценена следующим образом: $|x'(t)|\le F_1+H_0C_0+H_1C_0T=M_1$.

Дифференцируя (2) еще раз, имеем

$$x''(t)=f''(t)+(H'_t+H'_\tau)x(t)+H(t,t)x'(t)+$$

$$+\int\limits_0^t H''_{tt}(t,\tau)x(\tau)d\tau+H'_t(t,t)x(t).$$

Принимая во внимание, что

$$H_k,F_k=\begin{cases}O(1), & k\le r;\\ O\left(\dfrac{1}{t^{k-r-\zeta}}\right), & k>r,\end{cases}$$

и используя предыдущую оценку для $|x'(t)|$, получаем

$$|x''(t)|\le F_2+2H_1C_0+H_0(F_1+H_0C_0+H_1C_0T)+H_2C_0T+H_1C_0=$$

$$=F_2+H_2C_0T+3H_1C_0+H_0(F_1+H_0C_0+H_1C_0T)=M_2.$$

Далее:

$$|x'''(t)|\le F_3+7H_2C_0+5H_1|x'|+H_0|x''|+H_3C_0T=M_3.$$

Таким образом, дифференцируя (1) k раз ($k\le s$), можем заключить, что существует $x^{(k)}(t)$ и справедлива оценка

$$|x^{(k)}(t)| \le \begin{cases} M_k, & k \le r; \\ \dfrac{M_k}{t^{k-r-\zeta}}, & r < k \le s. \end{cases}$$

Следовательно, $x(t) \in Q^*_{r,\gamma}([0,T], M)$ с $M = \max\limits_{k=1,s}\{M_k, 1\}$, т.е. первое утверждение Леммы 1.1 доказано.

Рассмотрим теперь класс $B^*_{r,\gamma}([0,T])$. Нетрудно заметить, что $|x^{(r)}(t)|$ ограничена. Оценка для производной порядка v, $r < v < \infty$, имеет следующий вид:

$$|x^{(v)}(t)| \le \frac{C_1^v v^v}{t^{v-r-1+\gamma}} + \frac{C_2^v v^v C_0 T}{t^{v-r-1+\gamma}} + \frac{4^v C_3^v v^v}{t^{v-r-2+\gamma}} \frac{A^v v^v}{t^{v-r-1+\gamma}}, \tag{3}$$

где константы C_1, C_2, C_3 зависят только от A_1, A_2.

Следовательно, точное решение $x(t) \in B^*_{r,\gamma}([0,T], A)$.

Утверждения относительно гладкости точных решений слабосингулярных ИУВ распространяются на случай многомерных интегральных уравнений следующего вида:

$$(I-K)x \equiv x(t) - \int_0^{t_l} \cdots \int_0^{t_1} h(t,\tau) g(t-\tau) x(\tau) d\tau = f(t), \tag{4}$$

где $t = (t_1, \ldots, t_l)$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_l)$, $0 \le t_1, \ldots, t_l \le T$; слабосингулярные ядра $g(t-\tau)$ могут иметь вид

$$g(t_1, \ldots, t_l) = t_1^{r+\alpha} \cdots t_l^{r+\alpha}, \tag{5}$$

или

$$g(t_1, \ldots, t_l) = (t_1^2 + \cdots + t_l^2)^{r+\alpha}. \tag{6}$$

Применяя аналогичную технику доказательства с гораздо более объемными выкладками, заключаем:

1. Если $g(t_1, \ldots, t_l)$ имеет вид (5), $h(t,\tau)$ имеет непрерывные частные производные до порядка $s = r + [\gamma] + 1$ и $f(t) \in Q^*_{r,\gamma}(\Omega, 1)$, то точное решение $x(t)$ уравнения (4) принадлежит классу $Q^*_{r,\gamma}(\Omega, M)$ с $\gamma = s - r - \alpha$. Если же $h(t,\tau)$ – аналитическая функция, $f(t) \in B^*_{r,\gamma}(\Omega, 1)$, то $x(t) \in B^*_{r,\gamma}(\Omega, A)$.

2. Если $g(t_1, \ldots, t_l)$ имеет вид (6), $h(t,\tau)$ имеет непрерывные частные производные до порядка $s = r + [\gamma] + 1$ и $f(t) \in Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega, 1)$, то точное решение $x(t)$ уравнения (4) принадлежит классу $Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega, M)$ с $\gamma = s - r - \alpha$. Если же $h(t,\tau)$ – аналитическая функция, $f(t) \in B^{**}_{r,\gamma}(\Omega, 1)$, то $x(t) \in B^{**}_{r,\gamma}(\Omega, A)$.

Заметим, что свойства гладкости точных решений многомерных слабосингулярных интегральных уравнений Фредгольма были исследованы Г. М. Вайникко в работе [8].

2. Оптимальное восстановление функций из классов $Q^{*}_{r,\gamma}(\Omega,M)$, $Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega,M)$, $B^{*}_{r,\gamma}(\Omega,A)$ и $B^{**}_{r,\gamma}(\Omega,A)$

Для построения оптимальных по точности методов численного решения ИУВ необходимо сначала разработать оптимальные методы аппроксимации функций из соответствующих классов. Отметим, что в работе [9] получены оценки поперечников Бабенко и Колмогорова для достаточно широкого набора классов функций, которым принадлежат решения интегральных уравнений Вольтерра со степенными и логарифмическими особенностями ядер.

В данной главе вычисляются n-поперечники Бабенко и Колмогорова компактов из классов функций $Q^{*}_{r,\gamma}(\Omega,M)$, $Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega,M)$, $B^{*}_{r,\gamma}(\Omega,A)$ и $B^{**}_{r,\gamma}(\Omega,A)$, а также строятся локальные сплайны, реализующие оптимальные (по порядкам погрешности) аппроксимации. Полученные в данной главе результаты являются распространением результатов работ [9–13].

Напомним определения n-поперечников Бабенко и Колмогорова.

Пусть B – банахово пространство, $X\subset B$ – компактное множество, $\Pi: X\to \bar{X}$ – отображение $X\subset B$ на конечномерное пространство $\bar{X}$.

Определение 2.1 [14]. Пусть L^n – множество n-мерных линейных подпространств пространства B; n-поперечник Колмогорова $d_n(X,B)$ определяется выражением

$$d_n(X,B)=\inf_{L^n}\sup_{x\in X}\inf_{u\in L^n}\|x-u\|, \qquad (7)$$

где внешний инфимум берется по всем n-мерным подпространствам L^n.

Определение 2.2 [14]. n-поперечник Бабенко $\delta_n(X)$ определяется выражением

$$\delta_n(X)=\inf_{\Pi:X\to R^n}\sup_{x\in X}\operatorname{diam}\,\Pi^{-1}\Pi(x),$$

где инфимум вычисляется по всем непрерывным отображениям $\Pi: X\to R^n$.

Если инфимум в (7) достигается для некоторого L^n, то такое подпространство называется экстремальным подпространством.

Поперечники играют важную роль в численном анализе и теории аппроксимации, поскольку тесно связаны с такими проблемами, как ε-сложность интегрирования и аппроксимации, оптимальное дифференцирование, оптимальная аппроксимация решений операторных уравнений. Подробное исследование этих проблем в свете общей теории оптимальных алгоритмов проведено в [15].

В данной работе через A и A_k, $k=1,2,\ldots,$ будем обозначать некоторые положительные константы, не зависящие от N.

Теорема 2.1. Пусть $\Omega=[0,T]^l$, $l=1,2,\ldots$ Справедливы оценки

$$d_n(Q^*_{r,\gamma}(\Omega,M),C(\Omega)) \sim \delta_n(Q^*_{r,\gamma}(\Omega,M),C(\Omega)) \sim \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \sim n^{-s}$, если $l=1$, и

$$\varepsilon_n \sim \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)}, & v>\dfrac{l}{l-1}; \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l}, & v=\dfrac{l}{l-1}; \\ n^{-s/l}, & v<\dfrac{l}{l-1}, \end{cases} \tag{8}$$

если $l\neq 1$. Здесь $v=s/(s-\gamma)$ (здесь и ниже запись вида $\varepsilon\sim\lambda$ означает асимптотическую эквивалентность, т.е. $\varepsilon=O(\lambda)$).

Доказательство. Для того чтобы оценить точную нижнюю грань поперечников Бабенко, разделим область Ω на части Δ_k, $k=0,1,\ldots,N-1$. Здесь Δ_k означает множество точек из Ω, удовлетворяющих условиям

$$\left(\frac{k}{N}\right)^v T \le \rho(t,\Gamma_0) \le \left(\frac{k+1}{N}\right)^v T,\ k=0,1,\ldots,N-1,\ t=(t_1,\ldots,t_l).$$

Пусть $h_k=\left(\dfrac{k+1}{N}\right)^v T-\left(\dfrac{k}{N}\right)^v T,\ k=0,1,\ldots,N-1.$ Каждую из областей Δ_k покроем кубами и параллелепипедами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ с ребрами, не превосходящими величин h_k и параллельными координатным осям. В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}=[a^k_{i_1},a^k_{i_1+1};\ldots;a^k_{i_l},a^k_{i_l+1}]$, $k=0,1,\ldots,N-1$, построим функцию следующего вида:

$$\Psi^k_{i_1,\ldots,i_l}(t)=\begin{cases} A\dfrac{((t_1-a^k_{i_1})(a^k_{i_1+1}-t_1)\cdots(t_l-a^k_{i_l})(a^k_{i_l+1}-t_l))^s}{h_k^{s(2l-1)}((k+1)/N)^{v\gamma}}, & t\in\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}; \\ 0,\ t\notin\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}. \end{cases}$$

Константа A выбирается из условия $\Psi^k_{i_1,\ldots,i_l}\in Q^*_{r,\gamma}(\Omega,M)$.

Оценим теперь максимум функции $\Psi^k_{i_1,\ldots,i_l}(t)$. Очевидно, что

$$\max_{t\in\Omega}|\Psi^k_{i_1,\ldots,i_l}(t)|\ge A_1h^s\left(\frac{N}{k+1}\right)^{v\gamma}=A_2\frac{(k+\theta)^{(v-1)s}}{(k+1)^{v\gamma}}\frac{1}{N^{v(s-\gamma)}},\ 0<\theta<1.$$

Значение v выбирается так, чтобы $\max\limits_t|\Psi^k_{i_1,\ldots,i_l}(t)|$ не зависел от номера k. Для этого достаточно выполнения условия $v=s/(s-\gamma)$.

Поэтому

$$|\Psi^k_{i_1,\ldots,i_l}(t)|\geq\frac{A_1}{N^s}. \qquad (9)$$

Определим функцию $\Psi_\lambda(t)$ формулой

$$\Psi_\lambda(t)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1,\ldots,i_l}\lambda_{k,i_1,\ldots,i_l}\Psi^k_{i_1,\ldots,i_l}(t),\ -1\leq\lambda_{k,i_1,\ldots,i_l}\leq 1.$$

Применяя теорему Борсука [14], получаем

$$\delta_n(Q^*_{r,\gamma}(\Omega,M),C(\Omega))\geq\frac{A_1}{N^s},$$

где n – количество кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, покрывающих Ω.

Нетрудно видеть, что для $l=2,3,\ldots$

$$n\sim 2^l\sum_{k=0}^{N-1}\left\lceil\frac{T-\left(\frac{k}{N}\right)^v T}{h_k}\right\rceil^{l-1}=2^l\sum_{k=0}^{N-1}\left\lceil\frac{N^v-k^v}{(k+1)^v-k^v}\right\rceil^{l-1}\sim$$

$$\sim N^{v(l-1)}+2^l\sum_{k=1}^{N-1}\left\lceil\frac{N^v-k^v}{(k+\theta)^{v-1}}\right\rceil^{l-1}\sim\begin{cases}N^{v(l-1)}, & v>\dfrac{l}{l-1};\\ N^l\ln N, & v=\dfrac{l}{l-1};\\ N^l, & v<\dfrac{l}{l-1}.\end{cases} \qquad (10)$$

Следовательно,

$$\delta_n(Q^*_{r,\gamma}(\Omega,M),C(\Omega))\geq\begin{cases}n^{-(s-\gamma)/(l-1)}, & v>\dfrac{l}{l-1};\\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l}, & v=\dfrac{l}{l-1};\\ n^{-s/l}, & v<\dfrac{l}{l-1}.\end{cases} \qquad (11)$$

Построим непрерывный локальный сплайн, реализующий оценку (11).

Сначала более подробно опишем **случай** $l=1$.

Пусть N и n – целые числа, связанные соотношением $n=(N-1)(s-1)+s$. Введем разбиение сегмента $[0,T]$ точками $v_k=T(\frac{k}{N})^q$, $k=0,1,\ldots,N$, где $q=s/(s-\gamma)$, если γ – целое, или $q=s/(s-[\gamma]-1)$, если γ – нецелое.

Обозначим через Δ_k сегменты $\Delta_k = [v_k, v_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots,N-1$. Пусть

$$\xi_j^k = \frac{v_{k+1}+v_k}{2} + \frac{v_{k+1}-v_k}{2} y_j,$$

$$j = 1,2,\ldots,s-2;\ \xi_0^k = v_k,\ \xi_{s-1}^k = v_{k+1};\ k = 1,2,\ldots,N-1,$$

$$\xi_j^0 = \frac{v_1+v_0}{2} + \frac{v_1-v_0}{2} w_j,\ j = 1,2,\ldots,r-2;\ \xi_0^0 = v_0,\ \xi_{r-1}^0 = v_1,$$

где y_j и w_j – нули полиномов Лежандра степеней $(s-2)$ и $(r-2)$ соответственно.

Через $P_s(f,\Delta_k)$ обозначим оператор, заменяющий функцию $f(t)$, $t \in \Delta_k$, интерполяционным многочленом степени $(s-1)$ для $k = \overline{0,N-1}$, построенным по узлам ξ_j^k.

Через $f_N(t)$ обозначим локальный сплайн, определенный на отрезке $[0,T]$ и составленный из полиномов $P_s(f,\Delta_k)$, $k = 0,1,\ldots,N-1$.

Нетрудно заметить, что

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C[\Delta_k]} \le AN^{-s},\ k = \overline{1,N-1}.$$

Для сегмента Δ_0 имеем оценку

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C[\Delta_0]} \le \frac{A_1(v_1-v_0)^r}{r!} = A_2\left(\frac{T}{N^q}\right)^r = \frac{A_3}{N^{qr}} = AN^{-s}.$$

Таким образом, $\|f(t) - f_N(t)\|_{C[0,T]} \le AN^{-s}$. Поскольку общее число функционалов n, используемых при построении сплайна $f_N(t)$, оценивается как $n \sim N$, получаем

$$\delta_n(Q_{r,\gamma}^*(\Omega)) \sim n^{-s}.$$

Случай $l = 2,3,\ldots$

Введем оператор

$$P_s[f,[a_1,b_1;\ldots;a_l,b_l]] = P_s^{t_1}\cdots P_s^{t_l},$$

где $P_s^{t_i}$ – интерполяционный полином, действующий по переменной t_i, $i = 1,2,\ldots,l$, и построенный, как и ранее, в одномерном случае $l = 1$. Построение непрерывного локального сплайна начинаестя с области Δ_{N-1}.

В этой области функция $f(t_1,\ldots,t_l)$ заменяется интерполяционным полиномом $P_s[f,\Delta_{N-1}]$. Для построения локального сплайна в Δ_{N-2} покроем эту область кубами и параллелепипедами $\Delta_{i_1,\ldots,i_l}^{N-2}$. Заметим, что их ребра не превосходят h_{N-2}. Здесь вершины Δ_{N-1}, расположенные на границе с Δ_{N-2}, также являются вершинами соответствующих кубов из множества $\Delta_{i_1,\ldots,i_l}^{N-2}$.

В $\Delta_{i_1,\ldots,i_l}^{N-2}$ функция $f(t_1,\ldots,t_l)$ аппроксимируется интерполяционными полиномами $P_s[f,\Delta_{i_1,\ldots,i_l}^{N-2}]$.

Заметим, что мы интерполируем функцию $P_s[f,\Delta_{N-1}]$ вместо $f(t_1,\ldots,t_l)$ в $t\in\{\Delta_{i_1,\ldots,i_l}^{N-2}\bigcap\Delta_{N-1}\}$ (это необходимо для соблюдения условия непрерывности сплайна).

В областях Δ_k, $k=0,1,\ldots,N-3$, сплайн строится затем аналогичным образом.

Обозначим через $f_s^*(t_1,\ldots,t_l)$ сплайн, составленный из полиномов $P_s[f,\Delta_{i_1,\ldots,i_l}^{k}]$. Очевидно, что

$$\left\| f(t)-f_s^*(t)\right\|_C \le AN^{-s}. \tag{12}$$

Из этой оценки и неравенства (11) следует, что выполняется правая часть соотношения (8). Используя неравенство $\delta_n \le 2d_n$ [14], завершаем доказательство.

Теорема 2.2. Пусть $\Omega=[0,T]$. Справедливы оценки

$$\delta_n(B_{r,\gamma}^*(\Omega,A),C(\Omega)) \le 2^{-\sqrt{n}(r+1-\gamma)},\ d_n(B_{r,\gamma}^*(\Omega,A),C(\Omega)) \sim 2^{-\sqrt{n}(r+1-\gamma)}. \tag{13}$$

Доказательство. Построим сначала непрерывный локальный сплайн, реализующий оценку (13). Это позволит получить верхнюю оценку n-поперечника Колмогорова $d_n(B_{r,\gamma}^*(\Omega,A),C(\Omega))$.

Отрезок $[0,T]$ разделим на $N+1$ частей $\Delta_k=[v_k,v_{k+1}]$, $k=0,\ldots,N$, узлами $v_0=0$, $v_k=2^{k-1-N}T$, $k=1,\ldots,N+1$.

Пусть

$$\xi_j^k=\frac{v_{k+1}+v_k}{2}+\frac{v_{k+1}-v_k}{2}y_j,$$

$$j=1,2,\ldots,m_k-2;\ \xi_0^k=v_k,\ \xi_{m_k-1}^k=v_{k+1};\ k=0,1,\ldots,N, \tag{14}$$

где y_j – нули многочленов Чебышева первого рода степени m_k-2; $m_0=r$, $m_k=[\frac{10}{9}k(r+1-\gamma)AT]+1$, $k=1,2,\ldots,N$.

Через $P_k(f,\Delta_k)$ обозначим, как и ранее, оператор, интерполирующий функцию $f(t)$, $t\in\Delta_k$, с помощью полиномов степени (m_k-1), построенных по узлам ξ_j^k, $k=\overline{0,N}$. Обозначим также $h_k=v_{k+1}-v_k$, $k=0,1,\ldots,N$.

Через $f_N(t)$ обозначим локальный сплайн, определенный на отрезке $[0,T]$ и составленный из полиномов $P_k(f,\Delta_k)$, $k=0,1,\dots,N$.

Нетрудно видеть, что оценка погрешности аппроксимации на сегменте $t\in\Delta_0$ имеет вид

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C[\Delta_0]}\le A_1\ln rh_0^{r+1-\gamma}=A_2\left(\frac{T}{2^N}\right)^{r+1-\gamma}=\frac{A_3}{2^{N(r+1-\gamma)}}. \qquad (15)$$

Поскольку степени (m_k-1) интерполяционных полиномов растут пропорционально номеру k сегмента, необходимо оценить константу Лебега λ_{m_k} для системы узлов (14). Эта константа необходима для определения погрешности аппроксимации на участках Δ_k, $k=\overline{1,N}$.

Хорошо известно, что константа Лебега не зависит от длины отрезка, а только от распределения узлов на нем. Поэтому для простоты обозначений рассмотрим отрезок $[-a,a]$ и узлы

$$t_j=ay_j,\ j=1,2,\dots,m_k-2;\ t_0=-a,\ t_{m_k-1}=a,$$

где y_j – нули многочленов Чебышева первого рода степени (m_k-2).

Тогда

$$\lambda_{m_k}=\max_{t\in[-a,a]}\sum_{i=0}^{m_k-1}\left|\psi_{m_k-1,i}(t)\right|,$$

где $\psi_{m_k-1,i}(t)=\prod_{j=0,j\ne i}^{m_k-1}\frac{(t-t_j)}{(t_i-t_j)}$ – фундаментальные многочлены.

Пусть $i\ne 0,\ i\ne m_k-1$, тогда

$$|\psi_{m_k-1,i}(t)|=\left|\Phi_{m_k-1,i}(t)\varphi_{m_k-1,i}(t)\right|\le\left|\Phi_{m_k-1,i}(t)\right|\max_{t\in[-a,a]}|\varphi_{m_k-1,i}(t)|,$$

где

$$\Phi_{m_k-1,i}(t)=\frac{(t-t_1)\cdots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\cdots(t-t_{m_k-2})}{(t_i-t_1)\cdots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\cdots(t_i-t_{m_k-2})},$$

$$\varphi_{m_k-1,i}(t)=\frac{(t-t_0)(t-t_{m_k-1})}{(t_i-t_0)(t_i-t_{m_k-1})}.$$

Очевидно, что

$$\max_{t\in[-a,a]}|\varphi_{m_k-1,i}(t)|=\frac{a^2}{|(t_i+a)(t_i-a)|}\le\frac{a^2}{a^2-t_1^2}=\frac{a^2}{a^2-a^2\cos^2\frac{1}{2(m_k-2)}}=$$

$$= \frac{1}{1-\cos^2 \frac{1}{2(m_k-2)}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2(m_k-2)}} \sim m_k^2, \forall i.$$

Принимая во внимание, что

$$\max_{t\in[-a,a]} |\psi_{m_k-1,0}(t)| \sim \max_{t\in[-a,a]} |\psi_{m_k-1,m_k-1}(t)| \sim m_k,$$

имеем

$$\lambda_{m_k} \le A_4 m_k^2 \sum_{i=1}^{m_k-2} \left|\Phi_{m_k-1,i}(t)\right| + |\psi_{m_k-1,0}(t)| + |\psi_{m_k-1,m_k-1}(t)| = O(m_k^2 \ln m_k).$$

Следовательно, погрешность аппроксимации $\|f(t)-f_N(t)\|_{C[\Delta_k]}$, $k=\overline{1,N-1}$ может быть оценена следующим образом (см., например, [16]):

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C[\Delta_k]} \le A_5 \lambda_{m_k} \left(\frac{v_{k+1}-v_k}{2m_k}\right)^q \frac{A^q q^q}{v_k^{q-r-1+\gamma}},$$

где $q = \left[\frac{5(r+1-\gamma)k}{9}\right]+1$ – максимальный порядок производных, используемых для оценки погрешности.

Продолжая предыдущее неравенство, получаем

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C[\Delta_k]} \le \frac{A_6 m_k^2 \ln m_k \left(\frac{T2^{k-1-N}}{2m_k}\right)^q A^q q^q}{v_k^{q-r-1+\gamma}} =$$

$$= \frac{A_7 k^2 \ln k T^q A^q q^q}{m_k^q 2^{(N+2-k)q} 2^{(k-1-N)(q-r-1+\gamma)}} =$$

$$= \frac{A_8 k^2 \ln k \;\; T^q A^q q^q}{(\frac{10}{9}k(r+1-\gamma))^q \;\; A^q T^q \;\; 2^{N(r+1-\gamma)} \;\; 2^{q-(r+1-\gamma)(k-1)}} =$$

$$= \frac{A_8 k^2 \ln k \;\; q^q}{(2q)^q \;\; 2^{N(r+1-\gamma)} \;\; 2^{q-(r+1-\gamma)(k-1)}} = \frac{A_8 k^2 \ln k}{2^{N(r+1-\gamma)} \;\; 2^{2q-(r+1-\gamma)(k-1)}} \le$$

$$\le \frac{A_9 k^2 \ln k}{2^{N(r+1-\gamma)} \;\; 2^{\frac{r+1-\gamma}{9}(k+9)}}.$$

Следовательно, для достаточно больших значений N справедливы оценки

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C[\Delta_k]} \le \frac{A_{10}}{2^{N(r+1-\gamma)}}.$$

Таким образом, для всего отрезка $[0,T]$ получаем

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C[0,T]} \le \frac{A_{11}}{2^{N(r+1-\gamma)}}. \tag{16}$$

Общее число n функционалов, используемых при построении сплайна, оценивается как

$$n=\sum_{k=0}^{N} m_k=\sum_{k=0}^{N} \frac{10}{9} k(r+1-\gamma)AT \sim N^2.$$

Поэтому

$$\delta_n(B^*_{r,\gamma}(\Omega,A),C(\Omega)) \ge \frac{A_{13}}{2^{\sqrt{n}(r+1-\gamma)}}.$$

Неравенство (16) позволяет нам определить верхнюю границу n-поперечника Колмогорова

$$d_n(B^*_{r,\gamma}(\Omega,A),C(\Omega)) \le \frac{A_{14}}{2^{\sqrt{n}(r+1-\gamma)}}.$$

Принимая во внимание неравенство $\delta_n \le 2d_n$, завершаем доказательство.

Заметим, что вместо системы (14) также можно использовать другую систему узлов:

$$\xi_j^k=\frac{v_{k+1}+v_k}{2}+\frac{v_{k+1}-v_k}{2}y_j,\ j=0,2,\dots,m_k-1;\ k=0,1,\dots,N, \tag{17}$$

где y_j – нули многочленов Чебышева первого рода степени (m_k-1); $m_0=r$, $m_k=[k(r+1-\gamma)AT]+1$, $k=1,2,\dots,N$.

Это позволит исключить дополнительный множитель m_k^2 в оценке константы Лебега λ_{m_k}. Однако замкнутая система узлов (14) более подходит из практических соображений при построении численного решения ИУВ с помощью проекционного метода, описанного в разделе 3.

Теорема 2.3. Пусть $\Omega=[0,T]^l$, $l=2,3,\dots$ Тогда справедливы следующие оценки:

$$\delta_n(Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega,M),C(\Omega)) \sim d_n(Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega,M),C(\Omega)) \sim n^{-s/l}. \tag{18}$$

Доказательство. Для того чтобы оценить точную нижнюю грань $\delta_n(Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega,M),C(\Omega))$, покроем область Ω кубами следующим образом. Куб $\Delta^1=\Delta^1_{1,\dots,1}$ является пересечением областей

$$\left(0 \le t_1 \le \left(\frac{1}{N}\right)^v T\right) \cap \dots \cap \left(0 \le t_l \le \left(\frac{1}{N}\right)^v T\right),$$

$v = s/(s-\gamma)$, если γ – целое, $v = s/(s-[\gamma]-1)$, если γ – нецелое.

Область Δ^2 определяется затем как $\Delta^2 = \Delta_{2'} \setminus \Delta_{1''}$, где

$$\Delta_{k'} = \left\{(t_1,\dots,t_l) : 0 \le t_1,\dots,t_l \le \left(\frac{k}{N}\right)^v T\right\},$$

$$\Delta_{k''} = \left\{(t_1,\dots,t_l) : 0 \le t_1,\dots,t_l < \left(\frac{k}{N}\right)^v T\right\}.$$

Эта область также покрывается кубами и параллелепипедами $\Delta^2_{i_1,\dots,i_l}$, ребра которых параллельны осям координат и не превышают $h_1 = \left(\frac{2}{N}\right)^v T - \left(\frac{1}{N}\right)^v T$. Дальнейшее построение проводится по аналогии.

Каждая область $\Delta^k = \Delta_{k'} \setminus \Delta_{(k-1)''}$, $k = 3,\dots,N-1$, покрывается кубами и параллелепипедами $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, ребра которых не превосходят величины $h_{k-1} = \left(\frac{k}{N}\right)^v T - \left(\frac{k-1}{N}\right)^v T$.

В области $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ определяется функция $\Psi^k_{i_1,\dots,i_l}$, затем в области Ω вводится функция $\Psi_\lambda(t_1,\dots,t_l)$ (по аналогии с доказательством теоремы 2.1). Затем получаем оценку $|\Psi_\lambda(t_1,\dots,t_l)| \ge \frac{A_1}{N^s}$.

Определим число n параллелепипедов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$. Очевидно, что

$$n \sim \sum_{k=1}^{N-1}\left[\frac{\left(\frac{k+1}{N}\right)^v}{\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v}\right]^{l-1} \sim \sum_{k=1}^{N-1}\left[\frac{(k+1)^v}{(k+\theta)^{v-1}}\right]^{l-1} \sim \sum_{k=1}^{N-1} k^{l-1} \sim N^l.$$

Следовательно, $\delta_n(Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega, M), C(\Omega)) \ge An^{-s/l}$. Построение локального сплайна $f^{**}_N(t_1,\dots,t_l)$ и дальнейшие рассуждения проводятся по аналогии с доказательством теоремы 2.1. Теорема доказана.

Теорема 2.4. Пусть $\Omega = [0,T]^l$, $l = 2,3,\dots$, $0 < \gamma \le 1$. Тогда справедливы следующие оценки:

$$\delta_n(B^*_{r,\gamma}(\Omega,A),C(\Omega)) \sim d_n(B^*_{r,\gamma}(\Omega,A),C(\Omega)) \sim \frac{1}{n^{(r+1-\gamma)/(l-1)}}. \qquad (19)$$

Доказательство. Обозначим через Δ_0 множество точек $t\in\Omega$ таких, что $0\le\rho(t,\Gamma_0)\le 2^{-N}T$, а через Δ_k, $k=1,2,\dots,N$, множество точек $t\in\Omega$, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{2^{k-1}}{2^N}T \le \rho(t,\Gamma_0)\le\frac{2^k}{2^N}T.$$

Покроем каждую из областей Δ_k, $k=0,1,\dots,N$, кубами $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$. Ребра этих кубов параллельны ребрам Ω, не меньше h_k и не больше, чем $2h_k$, где $h_k=\dfrac{2^{k-1}}{2^N}T$, $k=0,1,\dots,N-1$.

Оценим общее число элементов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, покрывающих область Ω. Очевидно, что

$$n\sim\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{1-\dfrac{2^{k-1}}{2^N}}{\dfrac{2^k}{2^N}-\dfrac{2^{k-1}}{2^N}}\right]^{l-1} \sim \sum_{k=1}^{N}\left(2^{N-k+1}-1\right)^{l-1}\sim$$

$$\sim\sum_{k=1}^{N}\frac{2^{(N+1)(l-1)}}{2^{k(l-1)}}=\frac{1}{2^{l-1}-1}\left(2^{(N+1)(l-1)}-2^{l-1}\right).$$

Таким образом, $n\sim 2^{N(l-1)}$.

Повторяя рассуждения статьи [12], получаем оценку $\delta_n(B^*_{r,\gamma}(\Omega,A),C(\Omega))\ge 2^{-N(r+1-\gamma)}$ и заключаем, что

$$\delta_n(B^*_{r,\gamma}(\Omega,A),C(\Omega))\ge\frac{1}{n^{(r+1-\gamma)/(l-1)}}.$$

Построение непрерывного локального сплайна, реализующего оценку (19), производится подобно построению, приведенному в теореме 2.1. Параметр s здесь равен $s=\left[\dfrac{10}{9}N(r+1-\gamma)AT\right]+1$.

Принимая во внимание хорошо известное неравенство $\delta_n\le 2d_n$, связывающее n-поперечники Бабенко и Колмогорова, завершаем доказательство.

Теорема 2.5. Пусть $\Omega=[0,T]^l$, $l=2,3,\dots$ Справедливы оценки

$$\delta_n(B^{**}_{r,\gamma}(\Omega,A),C(\Omega))\sim d_n(B^{**}_{r,\gamma}(\Omega,A),C(\Omega))\sim$$

$$\sim \frac{1}{2^{\sqrt[l+1]{n}\,(r+1-\gamma)}}. \tag{20}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.4.

3. Приближенное решение многомерных ИУВ

Рассмотрим многомерные интегральные уравнения Вольтерра вида

$$(I-K)x \equiv x(t) - \int_0^{t_l} \cdots \int_0^{t_1} h(t,\tau) g(t-\tau) x(\tau) d\tau = f(t), \tag{21}$$

где $t=(t_1,\dots,t_l)$, $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_l)$, $0 \le t_1,\dots,t_l \le T$; слабосингулярные ядра $g(t-\tau)$ которых имеют следующую форму:

$$g(t_1,\dots,t_l) = t_1^{r+\alpha} \cdots t_l^{r+\alpha} \tag{22}$$

3.1. Численный алгоритм

Приближенное решение уравнения (21) будем искать в виде сплайна $\overset{*}{x}_N(t_1,\dots,t_l)$ с неизвестными значениями $\overset{*}{x}_N(\xi^k_{i_1},\dots,\xi^k_{i_l})$, $(\xi^k_{i_1},\dots,\xi^k_{i_l}) \in \Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, $k=0,1,\dots,N-1$, в узлах сетки.

Построение сплайна $\overset{*}{x}_N(t_1,\dots,t_l)$ описано в главе 2 и зависит от рассматриваемого класса функций.

Значения $\overset{*}{x}_N(\xi^k_{i_1},\dots,\xi^k_{i_l})$ в каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, $k=0,1,\dots,N-1$, определяются последовательно с помощью метода сплайн-коллокации из систем линейных уравнений

$$(I-K)P_N\left[x(t),\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}\right] \equiv P_N\left[x(t),\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}\right] -$$

$$-P_N\left[\int \cdots \int_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}} P_N^{\tau}[h(t,\tau)] g(t-\tau) P_N\left[x(\tau),\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}\right] d\tau,\ \Delta^k_{i_1,\dots,i_l}\right] =$$

$$= P_N[f^k_{i_1,\dots,i_l}(t),\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}]. \tag{23}$$

Здесь P_N – оператор проектирования на множество локальных сплайнов вида $\overset{*}{x}_N(t_1,\dots,t_l)$; $f^k_{i_1,\dots,i_l}(t_1,\dots,t_l)$ – новая правая часть уравнения (21), включающая интегралы по областям $\Delta^j_{i_1,\dots,i_l}$, $j=0,1,\dots,k$, обработанным ранее на предыдущих шагах (т.е. тем областям, значения сплайна в которых уже известны).

Все интегралы в (23) вычисляются приближенно с помощью составных кубатурных формул типа Гаусса, построенных на неравномерных сетках.

Возможны несколько способов обхода подобластей $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0,1,\ldots,N-1$. Один из таких способов, допускающий распараллеливание вычислительного процесса, предложен в работе [17].

3.2. Обоснование сходимости

Перепишем уравнение (21) и проекионный метод (23) в операторном виде:

$$x - Kx = f,\ K : X \to X,\ X \subset C(\Omega),\ \Omega = [0,T]^l,\ l = 2,3,\ldots, \tag{24}$$

$$x_N - P_N K x_N = P_N f,\ P_N : X \to X_N,\ X_N \subset C(\Omega), \tag{25}$$

где X – одно из множеств $Q^*_{r,\gamma}(\Omega, M)$ или $B^*_{r,\gamma}(\Omega, A)$; X_N – множества соответствующих локальных сплайнов.

Поскольку однородное интегральное уравнение Вольтерра $x - Kx = 0$ имеет только тривиальное решение, оператор $I-K$ – инъективный. Следовательно, оператор $I-K$ имеет ограниченный обратный оператор $(I-K)^{-1} : X \to X$. Для достаточно больших значений N имеем оценки

$$\left\|(I - P_N K)^{-1}\right\|_{C(\Omega)} = \left\|((I-K) + (K - P_N K))^{-1}\right\|_{C(\Omega)} \le$$

$$\le \frac{\left\|(I-K)^{-1}\right\|_{C(\Omega)}}{1 - \left\|(I-K)^{-1}\right\|_{C(\Omega)} \left\|K - P_N K\right\|_{C(\Omega)}} \le 2\left\|(I-K)^{-1}\right\|_{C(\Omega)} = A\ (\mathrm{const}),$$

если

$$\left\|K - P_N K\right\|_{C(\Omega)} \le \frac{1}{2\left\|(I-K)^{-1}\right\|_{C(\Omega)}}.$$

Покажем, что последняя оценка имеет место для достаточно больших N. Так как $y(t) \equiv (Kx)(t) \in X$ и X – плотное множество в $C(\Omega)$ (что справедливо для классов $Q^*_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $B^*_{r,\gamma}(\Omega, A)$), то получаем

$$\left\|K - P_N K\right\|_{C(\Omega)} = \sup_{x \in X, \|x\| \le 1} \max_{t \in \Omega} |\, x(t) - P_N x(t) \,| \le \varepsilon_N,$$

где $\varepsilon_N \to 0$ при $N \to \infty$. Поэтому $\left\|K - P_N K\right\|_{C(\Omega)} \le \dfrac{1}{2\left\|(I-K)^{-1}\right\|}$, начиная с достаточно больших значений N.

Таким образом, операторы $(I - P_N K)^{-1}$ существуют и равномерно ограничены, а уравнение (25) имеет единственное решение для всех достаточно больших N. Принимая во внимание, что $P_N x \to x$ при $N \to \infty$

для всех $x \in X$, применим оператор проектирования P_N к левой и правой частям уравнения (24):

$$x - P_N Kx = P_N f + x - P_N x.$$

Вычитая это уравнение из (25), получим

$$(I - P_N K)(x_N - x) = P_N x - x,$$

$$(x_N - x) = (I - P_N K)^{-1}(P_N x - x).$$

Следовательно,

$$\|x_N - x\|_C \le A\|P_N x - x\|_C \le \varepsilon_N(X). \qquad (26)$$

Таким образом, точность приближенного решения, полученного с помощью проекционного метода (25), определяется точностью $\varepsilon_N(X)$ аппроксимации функций из X локальными сплайнами.

С другой стороны, из теорем главы 2 следует, что для функций из X порядок оценки (26) не может быть улучшен (теоремы 2.1 и 2.2). Следовательно, алгоритм (23) является оптимальным по порядку точности на классах функций $Q^*_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $B^*_{r,\gamma}(\Omega, A)$.

В работе [5] доказано, что такие численные методы для ИУВ также являются оптимальными по порядку по сложности.

Численное решение многомерных ИУВ с оптимальной точностью требует выполнения огромного числа арифметических операций. В работе [17] на примере двумерных интегральных уравнений рассмотрена задача ускорения вычислительного процесса за счет использования многопроцессорных систем.

Замечание 3.1. Предложенный алгоритм также может быть применен к численному решению многомерных ИУВ вида

$$x(t) - \int_0^{t_l} \cdots \int_0^{t_1} h(t,\tau)[(t_1-\tau_1)^2 + \cdots + (t_l - \tau_l)^2]^{r+\alpha} x(\tau) d\tau_1 \ldots d\tau_l = f(t), \qquad (27)$$

$t = (t_1, \ldots, t_l)$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_l)$, $t \in [0, T]^l$, с коэффициентами из классов $Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega, M)$ или $B^{**}_{r,\gamma}(\Omega, A)$.

4. Численная иллюстрация

В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение на классе функций $B^*_{2,0.5}(\Omega,1)$ (входные функции в данном случае также являются функциями класса $Q^*_{r,\gamma}(\Omega,1)$ с $r = 2$ и некоторым значением γ):

$$x(t_1,t_2) - \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} (t_1-\tau_1)^{\frac{5}{2}} (t_2-\tau_2)^{\frac{5}{2}} x(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = (t_1 t_2)^{\frac{5}{2}} + \frac{25\pi^2 t_1^6 t_2^6}{1048576}, \qquad (28)$$

где $(t_1,t_2)\in\Omega=[0,1]^2$. Точное решение уравнения (28) имеет вид $x(t_1,t_2)=(t_1t_2)^{2.5}$.

Поскольку $B^*_{r,\gamma}(\Omega,A)\subset Q^*_{r,\gamma}(\Omega,M)$, то к уравнению (28) были применены два различных алгоритма аппроксимации для каждого из этих классов (их описания приведены в главе 2). Результаты приведены в табл. 1, 2.

Таблица 1

Погрешность аппроксимации на классе $Q^*_{2,2.5}(\Omega,1)$

N	1	2	3	5	10	15	20
ε_1	7,17 e–3	1,12 e–5	2,17 e–7	4,89 e–8	6,13 e–9	6,32 e–11	5,89 e–13
ε_2	0,011	6,15 e–4	9,05 e–6	6,73 e–7	2,39 e–8	6,84 e–10	2,87 e–11

Таблица 2

Погрешность аппроксимации на классе $B^*_{2,0.5}(\Omega,1)$

N	1	2	3	5	10	15	20
ε_1	6,25 e–4	1,04 e–7	3,10 e–8	5,99 e–9	5,23 e–10	7,31 e–13	6,19 e–15
ε_2	0,002	7,45 e–6	9,73 e–7	7,62 e–8	1,48 e–9	6,35 e–12	3,17 e–13

В табл. 1, 2 N – число подобластей в основном разбиении Ω; $\varepsilon_1=\max\limits_{i,j}|x(t_i,t_j)-x_N(t_i,t_j)|$ – погрешность в узлах сетки; $\varepsilon_2=\|x(t_1,t_2)-x_N(t_1,t_2)\|_{C(\Omega)}$ – погрешность в Ω.

Список литературы

1. **Baker, C. T. H.** A perspective on the numerical treatment of Volterra equations / C. T. H. Baker // J. Comp. Appl. Math. – 2000. – Vol. 125. – P. 217–249.
2. **Brunner, H.** Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations / H. Brunner. – Cambridge : Cambridge University Press, 2004.
3. **Brunner, H.** The piecewise polynomial collocation method for nonlinear weakly singular Volterra equation / H. Brunner, A. Pedas, G. Vainikko // Math. Comp. – 1999. – Vol. 68, № 227. – P. 1079–1095.
4. **Diogo, T.** Collocation methods for second-kind Volterra integral equations with weakly singular kernels / T. Diogo, S. McKee, T. Tang // Proc. Roy. Soc. Edin. – 1994. – Vol. 124A. – P. 199–210.
5. **Tynda, A. N.** Numerical algorithms of optimal complexity for weakly singular Volterra integral equations / A. N. Tynda // Comp. Meth. Appl. Math. – 2006. – Vol. 6, № 4. – P. 436–442.
6. **Tynda, A. N.** Spline-collocation technique for 2D weakly singular Volterra integral equations / A. N. Tynda // Bulletin of Middle-Volga Math. Society. – 2008. – Vol. 10, № 2. – P. 68–78.
7. **Verlan, A. F.** Integral equations: methods, algorithms, programms / A. F. Verlan, V. S. Sizikov. – Kiev : Naukova Dumka, 1986.
8. **Vainikko, G. M.** On the smoothness of solution of multidimensional weakly singular integral equations / G. M. Vainikko // Mat. Sbornik. – 1989. – Vol. 180, № 12. – P. 1709–1723.

9. **Бойков, И. В.** Поперечники соболевских классов функций с особенностями на границе / И. В. Бойков, А. Н. Тында // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 1. – С. 61–81.
10. **Boikov, I. V.** The optimal methods of approximation of the functions and computing the integrals / I. V. Boikov. – Penza : Penza State University Publishing House, 2007. – 236 p.
11. **Boikov, I. V.** Approximation of Some Classes of Functions by Local Splines / I. V. Boikov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1998. – Vol. 38, № 1. – P. 21–30.
12. **Boikov, I. V.** The optimal algorithms of recovery of the functions and computing of the integrals on a class of infinitely differentiable functions / I. V. Boikov // Izvestia Vuzov. Matematika. – 1998. – № 9. – P. 14–20.
13. **Boikov, I. V.** Accuracy-optimal approximate methods for solving Volterra integral equations / I. V. Boikov and A. N. Tynda // Differential Equations. – 2002. – Vol. 38, № 9. – P. 1305–1313.
14. **Babenko, K. I.** Theoretical Foundations and Construction of Numerical Algorithms for Problems in Mathematical Physics / K. I. Babenko. – Moscow : Nauka, 1979.
15. **Traub, J. F.** A General Theory of Optimal Algorithms / J. F. Traub and H. Wozniakowski. – New York : Academic Press, 1980.
16. **Dziadyk, V. K.** Introduction in Theory of Uniform Approximation of the Functions by Polynomials / V. K. Dziadyk. – Moscow : Nauka, 1977. – 512p.
17. **Boikov, I. V.** Methods of optimal accuracy for approximate solution of second-kind weakly singular Volterra integral equations for multiprocessor computers / I. V. Boikov and A. N. Tynda // Proc. of the ICCM (Novosibirsk, 2002). – Novosibirsk, 2002. – P. 381–388.

References

1. Baker C. T. H. *J. Comp. Appl. Math*. 2000, vol. 125, pp. 217–249.
2. Brunner H. *Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
3. Brunner, H., Pedas A., Vainikko G. *Math. Comp*. 1999, vol. 68, no. 227, pp. 1079–1095.
4. Diogo T., McKee S., Tang T. *Proc. Roy. Soc. Edin*. 1994, vol. 124A, pp. 199–210.
5. Tynda A. *Comp. Meth. Appl. Math*. 2006, vol. 6, no. 4, pp. 436–442.
6. Tynda A. N. *Bulletin of Middle-Volga Math. Society*. 2008, vol. 10, no. 2, pp. 68–78.
7. Verlan A. F., Sizikov V. S. *Integral equations: methods, algorithms, programms*. Kiev: Naukova Dumka, 1986.
8. Vainikko G. M. *Mat. Sbornik*. 1989, vol. 180, no. 12, pp. 1709–1723.
9. Boykov I. V., Tynda A. N. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2013, no. 1, pp. 61–81.
10. Boikov I. V. *The optimal methods of approximation of the functions and computing the integrals*. Penza: Penza State University Publishing House, 2007, 236 p.
11. Boikov I. V. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1998, vol. 38, no. 1, pp. 21–30.
12. Boikov I. V. *Izvestia Vuzov. Matematika*. 1998, no. 9, pp. 14–20.
13. Boikov I. V., Tynda A. N. *Differential Equations*. 2002, vol. 38, no. 9, pp. 1305–1313.
14. Babenko K. I. *Theoretical Foundations and Construction of Numerical Algorithms for Problems in Mathematical Physics*. Moscow: Nauka, 1979.
15. Traub J. F., Wozniakowski H. *A General Theory of Optimal Algorithms*. New York: Academic Press, 1980.

16. Dziadyk V. K. *Introduction in Theory of Uniform Approximation of the Functions by Polynomials*. Moscow: Nauka, 1977, 512 p.
17. Boikov I. V., Tynda A. N. *Proc. of the ICCM* (Novosibirsk, 2002). Novosibirsk, 2002, pp. 381–388.

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (г. Пенза, ул. Красная, 40)

Boykov Il'ya Vladimirovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (Penza, 40 Krasnaya str.)

E-mail: math@pnzgu.ru

Тында Александр Николаевич
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (г. Пенза, ул. Красная, 40)

Tynda Aleksandr Nikolaevich
Candidat of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (Penza, 40 Krasnaya str.)

E-mail: tynda@pnzgu.ru

Краснощеков Павел Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор, действительный член Российской академии наук, главный научный сотрудник, Вычислительный центр имени А. А. Дородницына Российской академии наук (г. Москва, ул. Вавилова, 40)

Krasnoshchekov Pavel Sergeevich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of the Russian Academy of Sciences, principal scientist, Computing center named after A.A. Dorodnitsyn of the Russian Academy of Sciences (Moscow, 40 Vavilova str.)

E-mail: math@pnzgu.ru

УДК 517.619

Бойков, И. В.

Оптимальные по точности методы решения некоторых классов слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра / И. В. Бойков, А. Н. Тында, П. С. Краснощеков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 87–107.